

TD₁₁ – Réduction des endomorphismes, Diagonalisation

Exercice 1 ★

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables et, le cas échéant, les diagonaliser

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} i+1 & 5-4i & -2i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 2-2i & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 ★

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n. \end{cases}$ En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, déterminer u_n en fonction de n .

Exercice 3 ★★

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 ★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$.
2. Déterminer les espaces propres de A , A est-elle diagonalisable ?
3. En prenant $U \in E_1(A)$ non-nul obtenu précédemment déterminer X tel que $(A - I_3)X = U$
4. En déduire une matrice P telle que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$

Exercice 5 ★★★

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable, la diagonaliser.
2. Soit M une matrice carrée qui commute avec A ($AM = MA$).
 - (a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que $MX \in E_\lambda(A)$
 - (b) En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \mu X$.
3. Montrer que les matrices qui commutent avec A forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on donnera une base.

Exercice 6 ★

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et T l'application définie sur E par : $T(f) : x \mapsto f'(x) - xf(x)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T .

Exercice 7 Endomorphismes nilpotents ★★

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $(f - a \text{Id}_E)^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour un certain entier p non nul et un scalaire a dans $\mathbb{K}$. Montrer que a est la seule valeur propre éventuelle de f . L'est-elle effectivement ?
2. On suppose E de dimension finie, f est-il diagonalisable ?
3. On prend maintenant $E = \mathbb{R}_n[X]$
 - (a) Soit $f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto P - P'$. Exprimer g en fonction de f , et en déduire que g est bijectif.
 - (b) Montrer que $g^{-1} = \text{Id} + f + f^2 + \dots + f^{n-1}$.

Exercice 8 ★★

On note A, J et S les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer χ_A . En déduire le spectre de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Justifier que J et S sont diagonalisables, et vérifier que $SJ = JS$.
3. On admet que $\text{Sp}(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Montrer que tout vecteur propre de S est vecteur propre de J .
4. En déduire qu'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

Exercice 9 Des matrices non semblables ★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A et B ont même rang, même trace et mêmes valeurs propres.
2. Montrer que A et B ne sont pas semblables (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable).

Exercice 10 Polynômes d'Hermite ★★★

Soit $n \geq 2$, et soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ défini par $\varphi(P) = 2XP' - P''$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire les valeurs propres de φ et la dimension de ses sous-espaces propres.
3. Montrer que pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme unitaire H_p tel que $H_p'' - 2XH_p' + 2pH_p = 0$.
4. Montrer que pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, H_p est de degré p .

Exercice 11 ★★★

Soient a, b deux réels, avec $a \neq 0$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = P(aX + b)$.

1. Déterminer les valeurs propres de u .
2. Montrer que si $a \notin \{-1, 1\}$, alors u est diagonalisable.
3. Si $a = 1$, quelles sont les valeurs de b pour lesquelles u est diagonalisable ?
4. On suppose à présent que $a = -1$. Montrer que $p = \frac{\text{Id} + u}{2}$ est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que u est diagonalisable.

Exercice 12 ★★

1. Déterminer la dimension de $\text{Ker}(\text{Tr}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \text{Tr}(M) = 0\}$. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\text{Tr}) \oplus \text{Vect}(I_n)$.
2. Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M + \text{Tr}(M)I_n$.
 - (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (b) En utilisant la question 1, montrer que f est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Exercice 13 ★★★★★

Dans E espace euclidien de dimension 3, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on considère (v_1, v_2) une famille de deux vecteurs. On définit $f : E \rightarrow E$

$$x \mapsto \langle v_1, x \rangle v_1 + \langle v_2, x \rangle v_2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme et que son rang est au plus 2.
2. Montrer que $\text{Rang}(f) < 2$ si et seulement si (v_1, v_2) est une famille liée.
3. f est-il diagonalisable ? si oui le diagonaliser.

Exercice 14 Réduction des endomorphismes de rang 1 ★★★★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\alpha_n \neq 0$.
3. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 15 Racines carrées d'une matrice diagonalisable ★★★★★

Soit $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec C , alors D est diagonale. En déduire que si $D^2 = C$, alors D est diagonale.
2. Déterminer le nombre d'éléments $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $D^2 = C$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre d'éléments B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $B^2 = A$.

Exercice 16 Résolution d'une équation matricielle ★★★★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche dans cet exercice à trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M = A$ (★).

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. Soit M une solution de (★).
 - (a) Vérifier que $AM = MA$.
 - (b) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que $MX \in E_\lambda(A)$, et en déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \mu X$. Donner une relation entre λ et μ .
3. Déterminer toutes les solutions de (★), et donner l'unique solution dont toutes les valeurs propres sont positives.

Exercice 17 ★★★★★★

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = M + 2M^\top + 3\text{Tr}(M)I_n$. f est-il diagonalisable ?

Exercice 18 ★★★★★

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g .
2. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g .
3. Montrer qu'il existe une base de E formée à la fois de vecteurs propres de f et de vecteurs propres de g . Que dire des matrices de f et g dans une telle base ?
4. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer le nombre de matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ (*i.e.* le nombre de « racines carrées » de A).

Exercices issus d'oraux

Exercice 19 ★★★★★ (Oral 2014)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable
2. Soit M une solution. Montrer que les valeurs propres de M appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$
3. Montrer que 0 est valeur propre de M
4. Déterminer la dimension des sous-espaces propres de M
5. Déterminer les matrices M répondant au problème

Exercice 20 ★★★ (Oral 2016)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^4
2. Déterminer les éléments propres de A et diagonaliser A dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.
3. En déduire la diagonalisation de B .

Exercice 21 ★★★ (Oral 2017)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace non-nulle. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $f_A(M) = \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$.

1. Montrer que la dimension de $\text{Ker}(\text{Tr})$ est $n^2 - 1$.
2. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
3. Montrer que $\text{Ker}(\text{Tr})$ et $\text{Vect}(A)$ sont chacun inclus dans un sous-espace propre de f_A .
4. Montrer que $\text{Ker}(\text{Tr})$ et $\text{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
5. f_A est-il diagonalisable ?

Exercice 22 ★★★ (Oral 2019)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée à A .

1. Déterminer les valeurs propres de f . f est-il diagonalisable ?
2. Montrer que $\text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \mathbb{R}^3$
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ à déterminer telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\text{Ker}(f^2)$ est stable par g et que $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$ est stable par g .
5. En déduire qu'il n'existe pas $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$.

Exercice 23 ★★★ (Oral 2019)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$ on pose $\phi(P) : x \mapsto \int_x^{x+1} P(t) dt$

1. Montrer que ϕ est linéaire
2. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ calculer $\phi(X^k)$. En déduire que ϕ est un endomorphisme de E
3. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique
4. ϕ est-elle bijective ? diagonalisable ?
5. Comparer $\phi(P')$ et $\phi(P)'$. En déduire les éléments propres de ϕ .

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. Un réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$. Or

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ 6 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (-1 - \lambda)(1 - \lambda) - 24 = \lambda^2 - 25.$$

Donc $\lambda \in \text{Spec}(A) \Leftrightarrow \lambda^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-5, 5\}$.

Ainsi, A possède deux valeurs propres, 5 et -5 . A est alors une matrice de taille 2 avec deux valeurs propres distinctes, A est donc diagonalisable.

$$\text{On a } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-5}(A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = -5x \\ 6x + y = -5y \end{cases} \Leftrightarrow x = -y.$$

$$\text{Donc } E_{-5}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

De même, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_5(A)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 5x \\ 6x + y = 5y \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x.$$

$$\text{Et donc } E_5(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Posons } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ on a alors } A = P \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ ou encore } \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$$

2. On a

$$\begin{aligned} \chi_B &= \begin{vmatrix} X-3 & -1 & -2 \\ -1 & X-1 & 0 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X-3 & X^2-4X+2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & X-2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_2 \leftarrow C_2 + (X-1)C_1 \\ \end{matrix} \\ &= \begin{vmatrix} X^2-4X+2 & -2 \\ X-2 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-2) \begin{vmatrix} X^2-4X+2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (X-2)(X^2-4X+4) \\ &= (X-2)^3 \end{aligned}$$

Ainsi 2 est la seule valeur propre de B : $\text{Spec}(B) = \{2\}$.

B admet 2 comme unique valeur propre et $B \neq 2I_3$, ainsi B n'est pas diagonalisable.

3. On a

$$\begin{aligned}
\chi_C &= \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ -2 & X+5 & -4 \\ -2 & 7 & X-6 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 0 & X-2 & 2-X \\ -2 & 7 & X-6 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
&= (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 7 & X-6 \end{vmatrix} \\
&= (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 7 & X-6 \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&= (X-2)(X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & X-6 \end{vmatrix} \\
&= (X-2)(X-1)(X+1)
\end{aligned}$$

Ainsi $\text{Sp}(C) = \{-1, 1, 2\}$

Comme C est de taille 3 et admet trois valeurs propres distinctes elle est diagonalisable, déterminons ses espaces propres

$$E_1(C) = \text{Ker}(C - I_3) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{-1}(C) = \text{Ker}(C + I_3) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 2 & -7 & 7 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
E_2(C) &= \text{Ker}(C - 2I_3) \\
&= \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \frac{3}{2}z \\ \frac{3}{3}z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on a alors

$$C = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

4. D est triangulaire et possède trois coefficients diagonaux distincts. Donc elle possède trois valeurs propres distinctes : 1, 2 et 4, et donc est diagonalisable. On a, par exemple

$$D = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

5. E étant triangulaire, ses valeurs propres sont sur sa diagonale : on a $\text{Spec}(E) = \{2, -2\}$, et nécessairement $\dim E_2(E) = 1$.

De plus, on a alors $\dim E_{-2}(E) = 3 - \text{Rang}(E + 2I_3) = 2$.

Donc E est diagonalisable car $\dim E_{-2}(E) + \dim E_2(E) = 3$. On a alors $E_{-2}(E) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

et $E_2(E) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a

$$E = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

6. F n'est pas diagonalisable car possède une unique valeur propre (*Réelle. Il y a en fait deux valeurs propres complexes conjuguées.*) 2 et $\dim E_2(F) = 3 - \text{Rang}(F - 2I_3) = 3 - 2 = 1$.

7. G est diagonalisable avec $\text{Sp}(G) = \{2, 4\}$ et $E_2(G) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_4(G) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On a donc $G = P^{-1}DP$ avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

8. On a

$$\begin{aligned} \chi_H &= \begin{vmatrix} X - i - 1 & -5 + 4i & 2i \\ 0 & X - i & 0 \\ 0 & -2 + 2i & X - 1 \end{vmatrix} \\ &= (X - i) \begin{vmatrix} X - i - 1 & 2i \\ 0 & X - 1 \end{vmatrix} \\ &= (X - i)(X - i - 1)(X - 1) \end{aligned}$$

Ainsi, H possède trois valeurs propres qui sont $1 + i, i$ et 1 .

En particulier, elle est diagonalisable.

On a alors $E_{1+i}(H) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_i(E) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $E_1(E) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $H = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. K est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. Notons n la taille de K .

De plus

$$\chi_K = K = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & X-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2+(n-1)(-1))(X-2-(-1))^{n-1} = (X-n-1)(X-1)^{n-1}$$

Ainsi $\chi(K) = \{1, n+1\}$.

On remarque que $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (n+1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_{n+1}(K)$. Or $n+1$ est une racine simple de χ_K , ainsi $E_{n+1}(K)$ est un espace

vectorel de dimension 1 et donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $E_{n+1}(K)$

De plus

$$E_1(K) = \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a alors

$$K = P \begin{pmatrix} n+1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Corrigé de l'exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} U_n$

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$

Par une récurrence simple (mais que vous devez tout de même faire dans votre copie) on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0$$

On va essayer de diagonaliser A pour calculer facilement A^n .

On obtient $\chi_A = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3)$, A est une matrice carrée de taille 3 qui admet 3 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

De plus $E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $E_2(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ et $E_3(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$

On a ainsi $A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

D'où, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -32^{n+1} + 23^n + 6 & 2^{n+3} - 3^{n+1} - 5 & -2^{n+1} + 3^n + 1 \\ -32^{n+2} + 23^{n+1} + 6 & 2^{n+4} - 3^{n+2} - 5 & -2^{n+2} + 3^{n+1} + 1 \\ -32^{n+3} + 23^{n+2} + 6 & 2^{n+5} - 3^{n+3} - 5 & -2^{n+3} + 3^{n+2} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - \frac{3^n}{2} - \frac{3}{2} \\ 2^{n+2} - \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2} \\ 2^{n+3} - \frac{3^{n+2}}{2} - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 3

Soit $m \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2-X & X-2 & -1 \\ X^2 - (m+1)X + 2m - 2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + (X-1)C_3 \\ &= - \begin{vmatrix} 2-X & X-2 \\ X^2 - (m+1)X + 2m - 2 & 2-m \end{vmatrix} \\ &= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ X^2 - (m+1)X + 2m - 2 & 2-m \end{vmatrix} \\ &= (X-2)(X^2 - (m+1)X + m) \\ &= (X-2)(X-1)(X-m) \end{aligned}$$

— Si $m \notin \{1, 2\}$ alors M est une matrice carrée de taille 3 qui admet trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

— Si $m = 1$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans ce cas 1 est une racine de multiplicité 2 de χ_A et $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Puisque $\dim(E_1(A)) = 1 < 2$ on en déduit que A n'est pas diagonalisable.

— Si $m = 2$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Dans ce cas $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Puisque $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 3$ on en déduit que A est diagonalisable.

Finalement A est diagonalisable si et seulement si $m \neq 1$.

Corrigé de l'exercice 4

1. On a $\chi_A = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X - 2)(X - 1)^2$
2. On cherche les espaces propres de A , on obtient

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

3. On va maintenant résoudre l'équation $(A - I_3)X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda + 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on obtient alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Corrigé de l'exercice 5

1. On obtient $\chi_A = (X - 3)(X - 2)(X + 3)$. χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

On recherche ensuite les vecteurs puis on construit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -24 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 30 & -25 & -5 \\ 0 & 24 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a alors $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$.

2. Soit M une matrice carrée qui commute avec A
 - (a) On a $AMX = MAX = M\lambda X = \lambda MX$. Donc $MX \in E_\lambda(A)$.
 - (b) Nous avons vu précédemment que les espaces propres de A sont tous de dimension 1. Ainsi $E_\lambda(A)$ est de dimension 1 et X , qui est un vecteur non nul de $E_\lambda(A)$ est alors une base de $E_\lambda(A)$.

On en déduit qu'il existe un réel μ tel que $MX = \mu X$.

Autrement dit, que X est un vecteur propre de M associé à une valeur propre μ .

3. D'après le calcul précédent, on a $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$ où $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$.

D'où

$$M \in \left\{ P \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} P^{-1}, (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Or

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} P^{-1} &= \mu_1 P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \mu_2 P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + \mu_3 P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \mu_1 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

On a $M \in \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$

Réciproquement, s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aM_1 + bM_2 + cM_3$ alors $M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$.

Dans ce cas

$$AM = PDP^{-1}P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = PD \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & -3c \end{pmatrix} P^{-1}$$

Et

$$MA = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} DP^{-1} = P \begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & -3c \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ainsi $AM = MA$.

Finalement l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$, c'est bien un espace vectoriel.

Montrons que la famille (M_1, M_2, M_3) est libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0_3$. Alors

$$P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = 0_3$$

D'où

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = P^{-1}0_3P = 0_3$$

Et donc $a = b = c = 0$. La famille (M_1, M_2, M_3) est bien libre, c'est donc une base de $\text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$.

Corrigé de l'exercice 6

1. — Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors f' et $x \mapsto xf(x)$ le sont aussi, donc $T(f)$ est encore de classe $\mathcal{C}^\infty$.

— Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} T(\lambda.f + \mu.g)(x) &= (\lambda.f + \mu.g)'(x) - x(\lambda.f + \mu.g)(x) \\ &= \lambda.f'(x) + \mu.g'(x) - \lambda x f(x) - \mu x g(x) \\ &= \lambda.(f'(x) - x f(x)) + \mu.(g'(x) - x g(x)) \\ &= \lambda.T(f)(x) + \mu.T(g)(x) \\ &= (\lambda.T(f) + \mu.T(g))(x) \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $T(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.T(f) + \mu.T(g)$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f \in E$,

$$T(f) = \lambda f \iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x + \lambda)f(x)$$

On sait résoudre l'équation différentielle $y' = (x + \lambda)y$. On en déduit alors que

$$T(f) = \lambda f \iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x + \lambda)f(x) \iff \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k \exp\left(\frac{x^2}{2} + \lambda x\right).$$

On constate que, pour tout réel λ , il existe des fonctions f solutions qui sont non nulles, donc λ est valeur propre de T et

$$E_\lambda(T) = \text{Vect}\left(x \mapsto \exp\left(\frac{x^2}{2} + \lambda x\right)\right)$$

Corrigé de l'exercice 7

1. Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé. On a alors $(f - a \text{Id}_E)(x) = (\lambda - a)x$.

Ainsi, en itérant, on obtient $(f - a \text{Id}_E)^p(x) = (\lambda - a)^p x$, d'où $(\lambda - a)^p x = 0_E$.

x étant un vecteur propre, il est non-nul, ainsi $(\lambda - a)^p = 0$ et donc $\lambda = a$.

a est donc l'unique valeur propre possible de f .

Puisque $(f - a \text{Id}_E)^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $f - a \text{Id}_E$ n'est pas bijectif, et donc 0 est bien valeur propre de u .

Finalement $\text{Sp}(f) = \{a\}$

2. f admet a comme unique valeur propre ainsi f est diagonalisable si et seulement si $f = a \text{Id}_E$.

3. On a aisément $g = \text{Id} - f$.

Il est clair que pour tout k , f^k est l'application $P \mapsto P^{(k)}$.

Or, nous savons que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P' \leq \deg P - 1$, $\deg P'' \leq \deg P - 2$, etc, $\deg P^{(n+1)} \leq \deg P - n - 1 \leq n - n - 1 \leq -1$.

Et donc $f^{(n+1)}(P) = 0$.

Ceci étant vrai pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a donc $f^{n+1} = 0$.

En revanche, $f^n(X^n) = n! \neq 0$, et donc $f^n \neq 0$.

D'après la première question, 0 est la seule valeur propre possible de f . D'autre part, nous savons que f n'est pas bijectif, car sinon f^{n+1} le serait également, ce qui n'est clairement pas le cas.

Donc $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

On a $g = \text{Id} - f$. Puisque 1 n'est pas valeur propre de f , $g = \text{Id} - f$ est bijectif.

4. D'après la formule de factorisation (qui reste valable pour un endomorphisme)

$$\begin{aligned} \text{Id} - f^p &= (\text{Id} - f) \circ (\text{Id} + \dots + f^{p-1}) \\ &= \text{Id} + f + f^2 + \dots + f^n - f - f^2 - \dots - f^n - \underbrace{f^{n+1}}_{=0} \\ &= \text{Id}. \end{aligned}$$

Un polynôme de degré négatif est nécessairement le polynôme nul, qui, par convention, est de degré égal à $-\infty$.

Ainsi

$$g \circ (\text{Id} + f + f^2 + \dots + f^n) = (\text{Id} - f) \circ (\text{Id} + f + \dots + f^n) = \text{Id}_E$$

Et donc $\text{Id} + f + \dots + f^n$ est bien la bijection réciproque de g .

Corrigé de l'exercice 8

1. Le calcul donne $\chi_A = X^3 + 3X = X(X^2 + 3)$. 0 est la seule racine réelle de ce polynôme donc 0 est la seule valeur propre réelle de A . On a ainsi $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

A a une seule valeur propre qui est 0 donc si A était diagonalisable alors A serait semblable à la matrice diagonale n'ayant que des 0 sur sa diagonale donc A serait semblable à la matrice nulle et ainsi A serait la matrice nulle ce qui est absurde. Donc A n'est pas diagonalisable.

2. J et S sont deux matrices symétriques réelles, d'après le théorème spectral elles sont donc diagonalisables.

Le calcul matriciel donne

$$SJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = JS$$

3. On sait que S est dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que S a 3 trois valeurs propres donc les sous-espaces propres de S sont tous de dimension 1. Or tout vecteur non nul d'une droite constitue une base de cette droite. Donc tout vecteur propre de S est une base de son sous-espace propre associé.

Soit α une valeur propre de S et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, non nul, un vecteur propre de S associé à α . On a donc $E_\alpha(S) = \text{Vect}(X)$.

On a $SX = \alpha X$, donc $JSX = SJX = \alpha JX$, d'où $(S - \alpha I_3)(JX) = (0)$ et ainsi $JX \in E_\alpha(S) = \text{Ker}(S - \alpha I_3) = \text{Vect}(X)$.

Comme $JX \in \text{Vect}(X)$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $JX = \mu X$. Comme X est non nul, X est vecteur propre de J .

4. On sait que S est diagonalisable et que le spectre de S est formé de $0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$. On pose X_1, X_2, X_3 des vecteurs propres associés respectivement à $0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

On pose P la matrice de passage de la base X_1, X_2, X_3 à la base canonique, i.e. la matrice contenant X_1, X_2, X_3 comme colonnes. On a alors

$$S = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{donc} \quad P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On sait que (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de S et donc de vecteurs propres de J ainsi $P^{-1}JP$ est aussi diagonale.

Corrigé de l'exercice 9

1. (a) Puisque A et B sont triangulaires et que leurs coefficients diagonaux sont tous non nuls, on a évidemment $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) = 3$.
De plus, $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 5$.
Les valeurs propres de A et de B sont égales à leurs coefficients diagonaux, donc $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(B) = \{1, 2\}$.

(b) On a

$$\dim(E_2(A)) = 3 - \text{Rang}(A - 2I_3) = 3 - 1 = 2 \quad \text{et} \quad \dim(E_2(B)) = 3 - \text{Rang}(B - 2I_3) = 3 - 2 = 1.$$

De plus $\dim(E_1(A)) = 1$ et $\dim(E_1(B)) = 1$.

Ainsi $\dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, A est donc diagonalisable, A est ainsi semblable à une matrice diagonale D .

Formule de factorisation

De manière plus générale, si u et v sont deux endomorphismes qui commutent alors

$$u^n - v^n = (u - v) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ v^{n-k} \right)$$

D'un autre coté on a $\dim(E_1(B)) + \dim(E_2(B)) = 2 < \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, B n'est donc pas diagonalisable.

Si B était semblable à A alors, par transitivité de la relation de similitude, B serait semblable à D et B serait donc diagonalisable, ce qui est absurde. Ainsi B n'est pas semblable à A .

Corrigé de l'exercice 10

1. Commençons par montrer que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Il est clair que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$.

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg P' \leq n-1$ et $\deg 2XP' \leq n$. Puisque $\deg P'' \leq n-2$, on a donc $\deg \varphi(P) \leq n$.

Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\varphi(\lambda P + Q) = 2X(\lambda P + Q)' - (\lambda P + Q)'' = 2X(\lambda P' + Q') - \lambda P'' - Q'' = \lambda(2XP' - P'') + (2XQ' - Q'') = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).$$

Ainsi, φ est bien linéaire, et donc est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2X$ et pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$\varphi(X^k) = 2kX^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

Et donc la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$\begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \dots & \varphi(X^{n-1}) & \varphi(X^n) \\ 0 & 0 & -2 & & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 4 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 2(n-1) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2n \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{matrix}.$$

Cette matrice est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, à savoir : $0, 2, \dots, 2n$.

Ainsi, $\text{Sp}(\varphi) = \{2p, p \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

Puisque de plus chacune des valeurs propres n'apparaît qu'une seule fois sur la diagonale, les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

3. On a $P'' - 2XP' + 2pP = 0 \Leftrightarrow \varphi(P) = 2pP \Leftrightarrow P \in E_{2p}(\varphi)$.

Or, $E_{2p}(\varphi)$ est de dimension 1, donc engendré par un unique polynôme P_{2p} .

Et donc les éléments de $E_{2p}(\varphi)$ sont tous de la forme λP_{2p} , avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Un et un seul de ces éléments est un polynôme de coefficient dominant égal à 1,

et donc $E_{2p}(\varphi)$ contient un unique polynôme unitaire.

Il existe donc un unique polynôme unitaire H_p tel que $H_p'' - 2XH_p' + 2pH_p = 0$.

4. Soit d_p le degré de H_p . Alors son coefficient dominant est 1.

Alors $2XH_p' - H_p'' = 2d_pX^{d_p} + Q_p$, avec $\deg(Q_p) < d_p$.

De même $2pH_p = 2pX^{d_p} + R_p$, avec $\deg(R_p) < d_p$.

Par identification des coefficients de degré d_p , $2p = 2d_p$ et donc $d_p = p$.

Une autre solution, plus matricielle :

Nous expliquons ici comment « lire » sur la matrice le fait qu'un vecteur propre associé à la valeur propre $2k$ est forcément de degré k .

L'explication est un peu longue à écrire, mais ce type de raisonnement peut éventuellement être utilisé à l'oral sans écrire tous les détails.

Puisque la matrice de f est triangulaire, et que le coefficient diagonal k se trouve sur la colonne correspondant à $f(X^k)$, on a envie de penser que le degré d'un vecteur propre associé à la valeur propre k est égal à k . C'est bien le cas, mais il y a un peu de travail pour en arriver là.

Détails

Si le coefficient dominant de P_{2p} est a , alors le coefficient dominant de λP est λa . Ainsi λP est unitaire si et seulement si $\lambda a = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{a}$. Plus généralement, tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension 1 contient un unique polynôme unitaire.

Commençons par remarquer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par f .
En effet, si $\deg P \leq k$, alors $\deg f(P) = \deg(2XP' - P'') = \deg(2XP') \leq k$.

Notons alors f_k la restriction de f à $\mathbb{R}_k[X]$, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ défini par $f_k(P) = f(P)$.

Alors la matrice de f_k dans la base canonique est la « sous-matrice » de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f)$ que l'on obtient en ne gardant que les $k+1$ premières lignes et les $k+1$ premières colonnes.

Et de même pour la matrice de f_{k-1} .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2(k-1) \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2(k-1) & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2k \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

En particulier, k n'est pas valeur propre de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f_{k-1})$, et donc il n'existe pas de polynôme non nul P , de degré inférieur ou égal à $k-1$ tel que $f_{k-1}(P) = kP \Leftrightarrow f(P) = kP$.

En revanche, k est valeur propre de f_k , et donc il existe un polynôme P non nul, de degré au plus k , tel que $f_k(P) = kP \Leftrightarrow f(P) = kP$.

Et donc un tel P n'étant pas de degré au plus $k-1$, il est de degré **exactement** k .

Enfin, puisque les sous-espaces propres de f sont tous de dimension 1, $E_k(f) = \text{Vect}(P)$, qui ne contient que le polynôme nul et des polynômes de degré k .

En particulier, tous les vecteurs propres de f associés à la valeur propre k sont de degré k .

Corrigé de l'exercice 11

1. On a $u(1) = 1$, $u(X) = aX + b$, et plus généralement, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$u(X^k) = (aX + b)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i X^i b^{k-i} = a^k X^k + k a^{k-1} b X^{k-1} + \dots + b^k.$$

Et donc la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(u) = \begin{pmatrix} f(1) & f(X) & f(X^2) & \dots & f(X^{n-1}) & f(X^n) \\ 1 & b & b^2 & \dots & \dots & b^n \\ \vdots & a & 2ab & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a^{n-1} & na^{n-1}b \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a^n \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{matrix}.$$

Cette matrice étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\text{Sp}(u) = \{a^k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

2. Si $a \notin \{-1, 1\}$, alors les a^k sont deux à deux distincts, et donc u possède $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ valeurs propres distinctes : u est diagonalisable.

3. Si $a = 1$, alors u ne possède qu'une valeur propre, qui est 1.

Il est donc diagonalisable si et seulement si $\dim E_1(u) = n+1$, soit encore si et seulement si $E_1(u) = \mathbb{R}_n[X]$.

C'est le cas si et seulement si pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P) = P$. En particulier, pour $P = X$, il faut alors que $X + b = X$, donc que $b = 0$.

Et inversement, si $b = 0$, alors u est l'identité, qui est bien entendu diagonalisable.

Donc si $a = 1$, u est diagonalisable si et seulement si $b = 0$.

4. On a

$$p^2 = \left(\frac{\text{Id} + u}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(\text{Id} + u)^2 = \frac{1}{4}(u^2 + 2u + \text{Id}) = \frac{1}{4}(2\text{Id} + 2u) = p.$$

Et donc p est un projecteur.

En particulier, p est diagonalisable : il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ est diagonale.

Et alors, dans cette même base, il vient $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = 2\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) - I_{n+1}$, qui est diagonale.

Et donc u est diagonalisable. On peut en fait plus rapidement montrer que u est une symétrie et donc u est diagonalisable.

Attention

Il n'est pas vrai en général pour deux endomorphismes que

$$(f+g)^2 = f^2 + 2f \circ g + g^2.$$

Ce n'est vrai que s'ils commutent (c'est la formule du binôme !). C'est bien le cas ici de u et Id , puisque l'identité commute à tout endomorphisme.

Corrigé de l'exercice 12

1. Nous savons que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle car, par exemple, $\text{Tr}(I_n) = n \neq 0$.

Donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2 - 1$.

Il est clair que $I_n \notin \text{Ker}(\text{Tr})$, ainsi $\text{Vect}(I_n) \cap \text{Ker}(\text{Tr}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$.

De plus $\dim(\text{Vect}(I_n)) = 1$, ainsi $\dim(\text{Vect}(I_n)) + \dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

On en déduit que $\text{Vect}(I_n)$ et $\text{Ker}(\text{Tr})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. (a) Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(\lambda M + N) = \lambda M + N + \text{Tr}(\lambda M + N)I_n = \lambda(M + \text{Tr}(M)I_n) + (N + \text{Tr}(N)I_n) = \lambda f(M) + f(N).$$

Donc f est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Si $M \in \text{Ker}(\text{Tr})$, alors $f(M) = M$.

Donc 1 est valeur propre de f et $\text{Ker}(\text{Tr}) \subset E_1(f)$, de sorte que $\dim E_1(f) \geq n^2 - 1$.

De plus, $f(I_n) = I_n + nI_n = (n+1)I_n$.

Donc $n+1$ est valeur propre de f , et ainsi, $\dim E_{n+1}(f) \geq 1$.

Mais alors $\dim E_1(f) + \dim E_{n+1}(f) \geq n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n)$.

Puisque l'inégalité inverse est toujours vérifiée, alors $\dim E_1(f) + \dim E_{n+1}(f) = n^2$, et donc f est diagonalisable, et ses valeurs propres sont 1 et $n+1$.

Remarque

A priori, f pourrait avoir d'autres valeurs propres. Mais puisque la somme des dimensions des deux sous-espaces propres est déjà égale à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il n'y a « pas de place » pour d'autres valeurs propres.

Une autre solution : Prouvons qu'il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de f .

Soit donc $(e_1, \dots, e_{n^2-1})$ une base de $\text{Ker}(\text{Tr})$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n^2 - 1 \rrbracket$,

$$f(e_i) = e_i + \underbrace{\text{Tr}(e_i)}_{=0} I_n = e_i.$$

Autrement dit, $e_1, \dots, e_{n^2-1}$ sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1.

Détails

Les e_i sont non nuls, car ils forment une famille libre.

D'autre part, I_n est une base de $\text{Vect}(I_n)$, et $f(I_n) = I_n + \text{Tr}(I_n)I_n = (n+1)I_n$.

Donc I_n est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $n+1$.

On en déduit donc que la famille $(e_1, \dots, e_{n^2-1}, I_n)$, obtenue par concaténation de bases de $\text{Ker}(\text{Tr})$ et de $\text{Vect}(I_n)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de f .

Et donc f est diagonalisable.

C'est ici qu'on utilise que $\text{Ker}(\text{Tr})$ et $\text{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice de f dans cette base sera alors

$$\begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_{n^2-1}) & f(I_n) \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{n^2-1} \\ I_n \end{matrix}.$$

Elle est diagonale, donc ses valeurs propres, qui sont celles de f , sont 1 et $n + 1$.

Corrigé de l'exercice 13

1. Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= \langle v_1, x + \lambda y \rangle v_1 + \langle v_2, x + \lambda y \rangle v_2 \\ &= \langle v_1, x \rangle v_1 + \lambda \langle v_1, y \rangle v_1 + \langle v_2, x \rangle v_2 + \lambda \langle v_2, y \rangle v_2 \\ &= f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

f est donc bien un endomorphisme. De plus, pour $x \in E$ on a

$$f(x) = \langle v_1, x \rangle v_1 + \langle v_2, x \rangle v_2 \in \text{Vect}(v_1, v_2)$$

Ainsi $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(v_1, v_2)$ et donc $\text{Rang}(f) \leq \dim(\text{Vect}(v_1, v_2)) \leq 2$

2. Remarquons dans un premier temps que si $v_1 = 0_E$ ou $v_2 = 0_E$ alors $\text{Rang}(f) < 2$ et (v_1, v_2) est une famille liée.

On suppose désormais v_1 et v_2 non-nuls.

Supposons que (v_1, v_2) est une famille liée, alors $\text{Rang}(f) \leq \dim(\text{Vect}(v_1, v_2)) < 2$

Réciproquement supposons que (v_1, v_2) est une famille libre. Soit alors $w_1 = v_1 - \langle v_1, v_2 \rangle \frac{v_2}{\|v_2\|^2}$.

On a alors $\langle w_1, v_2 \rangle = 0$ et, d'après Cauchy-Schwarz

$$\langle w_1, v_1 \rangle = \|v_1\|^2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle^2}{\|v_2\|^2} > 0$$

L'inégalité est stricte car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires par hypothèse.

On a alors $f(w_1) = \langle w_1, v_1 \rangle v_1 \in \text{Im}(f)$ et donc $v_1 \in \text{Im}(f)$.

De même en posant $w_2 = v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle \frac{v_1}{\|v_1\|^2}$ on a $\langle w_2, v_2 \rangle > 0$ et $\langle v_1, w_2 \rangle = 0$, puis $f(w_2) = \langle w_2, v_2 \rangle v_2 \in \text{Im}(f)$ et donc $v_2 \in \text{Im}(f)$.

Ainsi $\text{Vect}(v_1, v_2) \subset \text{Im}(f)$ et donc $\text{Rang}(f) \geq 2$.

Finalement $\text{Rang}(f) < 2$ si et seulement si (v_1, v_2) est une famille liée.

3. Notons $V = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

Supposons que v_1 et v_2 sont liés, notons alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_2 = \lambda v_1$, on a alors $V = \text{Vect}(v_1)$.

Soit $H = \text{Vect}(v_1)^\perp$. On a alors $H \subset \text{Ker}(f)$, i.e. $H \subset E_0(f)$.

De plus $f(v_1) = (1 + \lambda^2)\|v_1\|^2 v_1$. Ainsi $\text{Vect}(v_1) = E_{(1+\lambda^2)\|v_1\|^2}(f)$.

Finalement $E = E_{(1+\lambda^2)\|v_1\|^2}(f) \oplus E_0(f)$, f est donc diagonalisable et, dans une base adaptée

à la somme directe, sa matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} (1 + \lambda^2)\|v_1\|^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons que v_1 et v_2 sont libres. (v_1, v_2) est alors une base de V .

Soit $H = \text{Vect}(v_1)^\perp$. On a alors $H \subset \text{Ker}(f)$, i.e. $H \subset E_0(f)$.

On a vu à la question 1. que V est stable par f . Notons f_V la restriction de f à V .

Dans la base (v_1, v_2) la matrice de f_V est $\begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \|v_2\|^2 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est symétrique réelle donc diagonalisable. Ses valeurs propres sont

$$a = \frac{\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - \sqrt{4\langle v_1, v_2 \rangle^2 + (\|v_2\|^2 - \|v_1\|^2)^2}}{2}$$

et

$$b = \frac{\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \sqrt{4\langle v_1, v_2 \rangle^2 + (\|v_2\|^2 - \|v_1\|^2)^2}}{2}$$

Considérons $\mathcal{B}$ formée une base de vecteurs propres de f_V complétée par une base de H , alors, dans $\mathcal{B}$ la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

f est donc bien diagonalisable.

Valeurs

Cet exercice est issu d'un exercice d'oral restitué par un candidat, il est probable que, le jour de l'oral on ait supposé que v_1 et v_2 sont de norme 1 ce qui simplifie grandement l'expression.

Corrigé de l'exercice 14

1. Par le théorème du rang, si f est de rang égal à 1, alors $\dim(\text{Ker } f) = n - 1$. Soit donc $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\text{Ker } f$. Par le théorème de la base incomplète, il est possible de compléter cette base en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E . Nécessairement, les $n - 1$ premières colonnes de la matrice de f dans cette base seront nulles.

2. M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : 0 et α_n .

Si $\alpha_n \neq 0$, alors M possède deux valeurs propres distinctes, et, comme α_n est alors une racine simple de χ_A on a alors $1 \leq \dim(E_{\alpha_n}(f)) \leq 1$ et donc $\dim(E_{\alpha_n}(f)) = 1$.

On a alors $\dim(E_0(f)) + \dim(E_{\alpha_n}(f)) = \dim(\text{Ker } f) + 1 = n$. f est donc diagonalisable.

Si $\alpha_n = 0$, alors f possède 0 comme seule valeur propre, avec

$$\dim E_n(f) = \dim \text{Ker } f = n - 1 \neq n.$$

Donc f n'est pas diagonalisable.

3. Puisque $\text{Tr}(M) = \alpha_n$, nous venons de prouver que f est diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(M) \neq 0$.

Or A et M représentent toutes les deux l'endomorphisme f dans deux bases différentes de E , donc sont semblables. Et deux matrices semblables ayant même trace, f est donc diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 0$.

Corrigé de l'exercice 15

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice commutant avec C . Alors

$$CA = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a & 9b & 9c \\ 4d & 4e & 4f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ et } AC = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a & 4b & c \\ 9d & 4e & f \\ 9g & 4h & i \end{pmatrix}.$$

On a donc $AC = CA$ si et seulement si $b = c = d = f = g = h = 0$, c'est-à-dire si et seulement si A est diagonale.

Si $D^2 = C$, alors D et C commutent car C est alors un polynôme en D . Et par ce qui précède, D est alors diagonale.

2. Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ une matrice diagonale. Alors $D^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$.

Et donc $D^2 = C$ si et seulement si $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \\ c^2 = 1 \end{cases}$

Il y a donc $2^3 = 8$ matrices telles que $D^2 = C$, ce sont celles avec $a = \pm 3, b = \pm 4$ et $c = \pm 1$.

Généralisation

Le même raisonnement tiendrait pour toute matrice diagonale donc les coefficients diagonaux sont **deux à deux distincts**.

3. A est triangulaire, et possède trois valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable, semblable à C . Soit $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}CP$.

Alors si B vérifie $B^2 = A$, on a

$$(PBP^{-1})^2 = PB^2P^{-1} = PAP^{-1} = C.$$

Donc PBP^{-1} est une des 8 matrices obtenues à la question précédente, et donc $B = P^{-1}D$, où $D^2 = C$.

Inversement, si $B = P^{-1}DP$, avec $D^2 = C$, alors $B^2 = P^{-1}CP = A$.

Enfin, notons que les 8 matrices ainsi obtenues sont bien distinctes, puisqu'elles possèdent des valeurs propres distinctes.

Qui sont celles des matrices D telles que $D^2 = C$.

Corrigé de l'exercice 16

1. On obtient $\chi_A = X(X-2)(X-6)$, ainsi, $\text{Sp}(A) = \{0, 2, 6\}$.

Notons dès à présent que puisque nous avons trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Puisque les colonnes de A vérifient $C_1 - C_2 + 0 \cdot C_3 = 0$, un vecteur propre de A pour la valeur propre 0 est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Et donc $E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

De même, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ a ses colonnes liées par la relation $2C_1 - 2C_2 - C_3 = 0$,

donc $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Enfin, $A - 6I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ a ses colonnes liées par la relation $0C_1 + C_2 + C_3 = 0$, et

donc $E_6(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

$E_0(A)$ est de dimension 1, donc il suffit d'en trouver un vecteur non nul pour en avoir une base.

Relations

Les relations entre les colonnes ne sont pas toujours faciles à trouver : si on ne les voit pas, mieux vaut résoudre un système pour trouver des vecteurs propres.

2. (a) On a $AM = (M^2 + M)M = M^3 + M^2 = M(M^2 + M) = MA$, A et M commutent donc bien.

- (b) On a $AMX = MAX = M\lambda X = \lambda MX$.

Donc $MX \in E_\lambda(A)$. Mais nous avons vu précédemment que les $E_\lambda(A)$ sont tous de dimension 1, et donc X , qui est un vecteur non nul de $E_\lambda(A)$ est une base de $E_\lambda(A)$.

On en déduit qu'il existe un réel μ tel que $MX = \mu X$.

Autrement dit, que X est un vecteur propre de M associé à une valeur propre μ .

Mais nous savons alors que $\lambda X = AX = (M^2 + M)X = (\mu^2 + \mu)X$, et donc, $\lambda = \mu + \mu^2$.

X étant non nul.

3. Nous venons de prouver que les vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de M .

Et donc en particulier, si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A , c'est aussi une base formée de vecteurs propres de M .

Autrement dit, la matrice de f_M dans la base $\mathcal{B}$ doit être diagonale : $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{can}} M P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{can}}^{-1}$ est diagonale.

Mais nous connaissons déjà une base de vecteurs propres de A : il suffit de concaténer les bases

des sous-espaces propres de A : on peut par exemple prendre $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Dans ce cas, on a donc $P_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si on note P cette matrice, on a donc PMP^{-1} qui est une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$

avec $\mu_1^2 + \mu_1 = 0$, $\mu_2^2 + \mu_2 = 2$, $\mu_3^2 + \mu_3 = 6$.

Les solutions de ces équations sont $\mu_1 = 0$ et $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 1$ et $\mu_2 = -1$, $\mu_3 = 2$ et $\mu_3 = -3$.

Autrement dit, toutes les solutions de l'équation sont les

$$P \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \{0, 1\} \times \{1, -1\} \times \{2, -3\}.$$

Notons que ces solutions sont bien distinctes, puisqu'elles ont à chaque fois des valeurs propres différentes : il y a donc 8 solutions à l'équation.

En particulier, l'unique solution dont toutes les valeurs propres sont positives, est celle avec $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$, c'est :

$$P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque :

On a prouvé que puisque A et M possèdent une base commune de vecteurs propres alors il existe une matrice P telle que PAP^{-1} et PMP^{-1} soient simultanément diagonales.

Ou encore, qu'elles sont diagonalisables, avec la **même matrice de passage** (on dit parfois codiagonalisables)

En règle générale, si A et B sont deux matrices diagonalisables, alors il existe une matrice P_1 telle que $P_1AP_1^{-1}$ soit diagonale, il existe une matrice P_2 telle que $P_2BP_2^{-1}$ soit diagonale, mais il n'y a a priori aucun lien entre P_1 et P_2 .

Corrigé de l'exercice 17

Commençons par remarquer qu'on a $f(I_n) = I_n + 2I_n + 3nI_n = 3(n+1)I_n$.

Et donc $3(n+1)$ est une valeur propre de f .

Si M est antisymétrique, alors ses coefficients diagonaux sont nuls, et donc $\text{Tr}(M) = 0$, de sorte que $f(M) = M - 2M = -M$.

Et donc -1 est valeur propre de f , et $E_{-1}(f)$ contient $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices antisymétriques.

Enfin, si M est symétrique et de trace nulle, alors $f(M) = M + 2M = 3M$.

Puisqu'il existe bien des matrices non nulles qui sont symétriques et de trace nulle, on en déduit que 3 est valeur propre de f .

Notons F l'ensemble des matrices symétriques de trace nulle, on a alors $F \subset E_3(f)$.

Alors F est le noyau de la forme linéaire $\varphi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(M) = \text{Tr}(M)$.

Cette forme linéaire étant non nulle, on en déduit que F est un hyperplan de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et donc de dimension $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) - 1$.

Première méthode : si l'on sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Alors $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par ce qui a été dit précédemment, on a

$$\dim E_{3(n+1)}(f) \geq 1, \dim E_{-1}(f) \geq \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \dim E_3(f) \geq \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) - 1.$$

Et donc

$$\dim E_{-1}(f) + \dim E_3(f) + \dim E_{3(n+1)}(f) \geq \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Puisque l'inégalité réciproque est toujours vraie, on a donc

$$\dim E_1(f) + \dim E_3(f) + \dim E_{3(n+1)}(f) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

et par conséquent f est diagonalisable.

Prendre par exemple
 $D =$
 $\text{Diag}(1, \dots, 1, 1 - n).$

Remarque

Il n'y a pas besoin de les connaître ici, mais les dimensions de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont connues :

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Seconde méthode : si on ne sait pas que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut montrer « à la main » que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme directe de ses sous-espaces propres.

Notons qu'à ce stade, nous ne sommes pas sûrs d'avoir toutes les valeurs propres de f , mais comme nous n'en trouvons pas d'autres que les trois trouvées précédemment, nous allons essayer de prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus F \oplus \text{Vect}(I_n)$.

Raisonnons par analyse synthèse : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et supposons que $M = A + B + C$, avec $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $B \in F$ et $C \in \text{Vect}(I_n)$.

Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $C = \lambda I_n$.

Et alors $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) + \lambda \text{Tr}(I_n) = 0 + 0 + \lambda n$.

Et donc $\lambda = \frac{\text{Tr}(M)}{n}$.

De plus, on a $M^\top = A^\top + B^\top + \lambda I_n = -A + B + \lambda I_n$.

Et donc $A = \frac{M - M^\top}{2}$ et $B = \frac{M + M^\top}{2} - \lambda I_n = \frac{M + M^\top}{2} - \frac{\text{Tr}(M)}{n} I_n$.

Ainsi, si une telle décomposition $M = A + B + C$ existe, elle est unique.

Inversement, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, posons

$$A = \frac{M - M^\top}{2}, B = \frac{M + M^\top}{2} - \frac{\text{Tr}(M)}{n} I_n \text{ et } C = \frac{\text{Tr}(M)}{n} I_n.$$

Alors il est clair que $C \in \text{Vect}(I_n)$, A est antisymétrique car $A^\top = \frac{M^\top - M}{2} = -A$.

De plus, B est symétrique car $B^\top = \frac{M^\top + M}{2} - \frac{\text{Tr}(M)}{n} I_n = B$, et elle est de trace nulle car

$$\text{Tr}(B) = \frac{1}{2} \text{Tr}(M^\top) + \frac{1}{2} \text{Tr}(M) - \frac{\text{Tr}(M)}{n} \text{Tr}(I_n) = \frac{1}{2} \text{Tr}(M) + \frac{1}{2} \text{Tr}(M) - \text{Tr}(M) = 0.$$

Donc $B \in F$.

Ainsi, tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ plus un élément de F , plus un élément de $\text{Vect}(I_n)$.

En particulier, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme un élément de $E_{-1}(f)$ plus un élément de $E_{-3}(f)$ plus un élément de $E_{3(n+1)}(f)$.

Et donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_{-1}(f) + E_{-3}(f) + E_{3(n+1)}(f)$.

Mais comme nous savons déjà que les sous-espaces propres sont en somme directe, on a donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_{-1}(f) \oplus E_{-3}(f) \oplus E_{3(n+1)}(f)$.

Et donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme directe de sous-espaces propres de f : f est diagonalisable.

Notons alors au passage que $E_{-1}(f) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $E_{-3}(f) = F$ et $E_{3(n+1)}(f) = \text{Vect}(I_n)$, alors que nous n'avions jusqu'à présent que des inclusions.

Corrigé de l'exercice 18

1. Soit $\lambda \in \text{Spec}(f)$, et soit $x \in E_\lambda(f)$. Alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$, de sorte que $g(x) \in E_\lambda(f)$.

On en déduit que $E_\lambda(f)$ est stable par g , et donc tous les sous-espaces propres de f sont stables par g .

2. Soit $x \in E$ un vecteur propre de f , associé à la valeur propre λ . Puisque $E_\lambda(f)$ est de dimension 1, x est une base de $E_\lambda(f)$ (car un vecteur propre est toujours non nul par définition), et $E_\lambda(f)$ étant stable par g , on en déduit qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \mu x$. Ainsi, x est bien vecteur propre de g .

Plus généralement

Tout sous-espace stable de dimension 1 est nécessairement engendré par un vecteur propre.

3. Si f possède n valeurs propres distinctes, alors tous les sous-espaces propres associés sont de dimension un. De plus, la somme des sous-espaces propres est égale à E tout entier, et donc la concaténation de bases des sous-espaces propres est une base de E formée de vecteurs propres de f .

Mais d'après la question précédente, il s'agit également de vecteurs propres de g .

Par conséquent, les matrices de f et g sont toutes deux diagonales dans cette base.

4. D'après ce qui a été dit précédemment, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale. Notons D cette matrice. Alors A et B sont semblables car elles représentent

le même endomorphisme. Par conséquent, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}DP$.

Si $B^2 = A$, alors B commute avec A car $AB = B^3 = BA$. Soit alors g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est B . Alors f et g commutent.

D'après ce qui a été dit dans les questions précédentes, dans une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f , la matrice de g doit être diagonale. En particulier, $\Delta = PBP^{-1}$ doit être diagonale, et vérifier $\Delta^2 = D$.

Nous sommes donc ramenés à trouver le nombre de matrices diagonales Δ vérifiant $\Delta^2 = D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où les λ_i sont les valeurs propres de f .

Mais rappelons que si $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n \end{pmatrix}$, alors $\Delta^2 = \begin{pmatrix} \delta_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n^2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, les coefficients diagonaux de Δ doivent être les racines carrées de ceux de D , ou les opposées de ces racines carrées.

- Si D (et donc A) possède au moins une valeur propre strictement négative, alors il n'existe pas de matrice Δ vérifiant $\Delta^2 = D$, et donc pas de matrice B vérifiant $B^2 = A$.
- Si D (et donc A) a toutes ses valeurs propres strictement positives, alors il existe 2^n matrices

Δ vérifiant $\Delta^2 = D$, et donc 2^n matrices vérifiant $B^2 = A$.

Notons que si $\Delta^2 = D$, alors en posant $B = P^{-1}\Delta P$, on a bien $B^2 = A$, et que si Δ_1, Δ_2 sont deux matrices distinctes vérifiant $\Delta_1^2 = \Delta_2^2 = D$, alors les matrices $P^{-1}\Delta_1 P$ et $P^{-1}\Delta_2 P$ sont également distinctes, tout simplement car elles n'ont pas les mêmes valeurs propres.

- Enfin, si 0 est valeur propre de D et que toutes les autres valeurs propres sont strictement positives, alors il existe 2^{n-1} matrices Δ , et donc autant de B .

Détails

Pour chaque coefficient δ_i , il y a deux choix : $\delta_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$.

Détails

Si $\lambda_i = 0$, alors il n'y a qu'une option pour δ_i : $\delta_i = 0$.

Corrigé de l'exercice 19

- On a $\chi_A = X(X-1)^2$. Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ on en déduit que A est trigonalisable.

On a

$$\dim(E_1(A)) = 3 - \text{Rang}(A - I_3) = 3 - \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 3 - 2 = 1$$

Ainsi $\dim(E_1(A)) = 1$ et 1 est une racine de multiplicité 2 de χ_A . On en déduit que A n'est pas diagonalisable.

- Soit M une solution. On sait que, si $\lambda \in \text{Sp}(M)$ alors $\lambda^2 \in \text{Sp}(M^2)$.

Or $\text{Sp}(M^2) = \text{Sp}(A) = \{0, 1\}$. Ainsi $\lambda^2 \in \{0, 1\}$ et donc $\lambda \in \{0, -1, 1\}$.

- 0 est valeur propre de M si et seulement si M n'est pas inversible.

Si M était inversible alors $M^2 = A$ le serait également, or A n'est pas inversible, ainsi M n'est pas inversible et donc 0 $\in \text{Sp}(M)$.

- Si X est un vecteur propre de M pour une valeur propre λ alors X est un vecteur propre de M^2 pour la valeur propre λ^2 . On a ainsi $E_0(M) \subset E_0(A)$, $E_1(M) \subset E_1(A)$ et $E_{-1}(M) \subset E_1(A)$.

Puisque 0 est une valeur propre de M on a alors $1 \leq \dim(E_0(M)) \leq \dim(E_0(A)) \leq 1$ et donc $\dim(E_0(M)) = 1$.

Comme $1 \neq -1$ les espaces propres $E_1(M)$ et $E_{-1}(M)$ sont en somme directe et donc $E_1(M) \oplus E_{-1}(M) \subset E_1(A)$.

Ainsi $\dim(E_1(M)) + \dim(E_{-1}(M)) \leq 1$.

Si 0 était la seule valeur propre de M alors, en trigonalisant M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ on pourrait

écrire $M = P \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$

Alors on aurait $A = M^2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ et donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$ ce qui n'est pas le cas.

Ainsi M admet au moins une autre valeur propre.

Puisque $\dim(E_1(M)) + \dim(E_{-1}(M)) \leq 1$ alors 1 et -1 ne peuvent pas être toutes les deux valeurs propres. Ainsi soit 1 est valeur propre de M et dans ce cas $\dim(E_1(M)) = 1$, $\dim(E_{-1}(M)) = 0$, soit -1 est valeur propre de M et dans ce cas $\dim(E_1(M)) = 0$, $\dim(E_{-1}(M)) = 1$.

5. Soit X un vecteur propre de M associé à la valeur propre 0, on a alors $MX = 0_{3,1}$, d'où $M^2X = 0_{3,1}$

Ainsi $X \in \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi $\mathbb{E}_0(M) \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et donc, puisque $\dim(E_0(M)) = 1$, on a

$$\mathbb{E}_0(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

— Supposons dans un premier temps que -1 est valeur propre de M , soit Y un vecteur propre de M associé à la valeur propre -1 , on a alors $MY = -Y$, d'où $M^2Y = Y$

Ainsi $Y \in \text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi $\mathbb{E}_{-1}(M) \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et donc, puisque $\dim(E_{-1}(M)) = 1$, on a

$$\mathbb{E}_{-1}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Soit enfin $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $P = (X, Y, Z)$

On a alors $M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Ainsi

$$A = M^2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Et donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $a = 0$ et $b = -\frac{1}{2}$, d'où

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Idée ?

Z vérifie $AZ = Z + Y$, on a alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Coefficients diagonaux

Les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M et, élevés au carré, ce seront les valeurs propres de A , le dernier coefficient diagonal est alors forcément -1 (ou 1 dans le cas où 1 est valeur propre de M et pas -1)

- Supposons maintenant que 1 est valeur propre de M , soit Y un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, on a alors $MY = Y$, d'où $M^2Y = Y$

$$\text{Ainsi } Y \in \text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{E}_1(M) \subset \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ et donc, puisque } \dim(E_1(M)) = 1, \mathbb{E}_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$$\text{Soit enfin } Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } P = (X, Y, Z)$$

$$\text{On a alors } M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi

$$A = M^2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Et donc

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$, d'où

$$M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement les matrices répondant au problème sont $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 20

1. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On a $\chi_A = X^4 + 1 = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$. Puisque χ_A est scindé à racines simples A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$\text{On obtient } E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad E_i(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \right) \text{ et}$$

$$E_{-i}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} \right).$$

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{pmatrix}$ et on a alors

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$$

Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

3. On peut remarquer que $B = 4I_4 + 3A + 2A^2 + A^3$, ainsi

$$\begin{aligned} B &= 4I_4 + 3A + 2A^2 + A^3 \\ &= 4PP^{-1} + 3PDP^{-1} + 2PD^2P^{-1} + PD^3P^{-1} \\ &= P(4I_4 + 3D + 2D^2 + D^3)P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 4+3+2+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4-3+2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4+3i-2-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-3i-2+i \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-2i \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

P^{-1}

Connaître P^{-1} explicitement n'est ni demandé ni réellement utile par la suite, on s'épargnera donc ce calcul fastidieux

Corrigé de l'exercice 21

1. La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{C}$ et donc $\dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1$.

D'après le théorème du rang on a alors $\dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) - \text{Rang}(\text{Tr}) = n^2 - 1$.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\text{Tr}(M) \in \mathbb{R}$ ainsi $\text{Tr}(M)A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Tr}(A)M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'où $f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2. Soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_A(M_1 + \lambda M_2) &= \text{Tr}(A)(M_1 + \lambda M_2) - \text{Tr}(M_1 + \lambda M_2)A \\ &= \text{Tr}(A)M_1 + \lambda \text{Tr}(A)M_2 - (\text{Tr}(M_1) + \lambda \text{Tr}(M_2))A \\ &= \text{Tr}(A)M_1 + \lambda \text{Tr}(A)M_2 - \text{Tr}(M_1)A - \lambda(\text{Tr}(M_2)A) \\ &= f_A(M_1) + \lambda f_A(M_2) \end{aligned}$$

Ainsi f_A est bien linéaire, comme, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $f_A(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors f_A est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

3. On a $f(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} = 0A$, comme $A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ alors A est un vecteur propre de f_A associé à la valeur propre 0. En particulier 0 est valeur propre de f_A et $\text{Vect}(A) \subset E_0(f_A)$.

Remarque

Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est un vecteur non-nul du noyau, ainsi 0 est valeur propre de f_A si $\text{Ker}(f_A) \neq \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\}$

On peut également en déduire que $\dim(E_0(f_A)) \geq 1$.

Si $M \in \text{Ker}(\text{Tr})$ alors $f_A(M) = \text{Tr}(A)M$, ainsi $M \in E_{\text{Tr}(A)}(f_A)$. On en déduit que $\text{Ker}(\text{Tr}) \subset E_{\text{Tr}(A)}(f_A)$, en particulier $\dim(E_{\text{Tr}(A)}(f_A)) \geq n^2 - 1$

4. et 5. D'après les question précédente on a $\dim(E_0(f_A)) \geq 1$ et $\dim(E_{\text{Tr}(A)}(f_A)) \geq n^2 - 1$.

Ainsi

$$\dim(E_{\text{Tr}(A)}(f_A)) + \dim(E_0(f_A)) \geq n^2$$

Or, comme $E_{\text{Tr}(A)}(f_A)$ et $E_0(f_A)$ sont en somme directe (en tant qu'espaces propres associés à des valeurs propres distinctes) on a également

$$\dim(E_{\text{Tr}(A)}(f_A)) + \dim(E_0(f_A)) = \dim(E_{\text{Tr}(A)}(f_A) \oplus E_0(f_A)) \leq n^2$$

Finalement

$$\dim(E_{\text{Tr}(A)}(f_A)) + \dim(E_0(f_A)) = n^2$$

f_A est donc diagonalisable et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = E_{\text{Tr}(A)}(f_A) \oplus E_0(f_A)$

On a $\text{Ker}(\text{Tr}) \subset E_{\text{Tr}(A)}(f_A)$ et $\dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = \dim(E_{\text{Tr}(A)}(f_A)) = n^2 - 1$, d'où $\text{Ker}(\text{Tr}) = E_{\text{Tr}(A)}(f_A)$.

De même $\text{Vect}(A) \subset E_0(f_A)$ et $\dim(\text{Vect}(A)) = \dim(E_0(f_A)) = 1$, d'où $\text{Vect}(A) = E_0(f_A)$.

On en déduit donc que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = E_{\text{Tr}(A)}(f_A) \oplus E_0(f_A) = \text{Ker}(\text{Tr}) \oplus \text{Vect}(A)$.

Corrigé de l'exercice 22

1. On obtient $\chi_A = \chi_f = X^2(X - 2)$. Ainsi $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A) = \{0, 2\}$.

De plus

$$\begin{aligned} \dim(E_0(A)) &= 3 - \text{Rang}(A) \\ &= 3 - \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \right) \\ &= 3 - \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= 3 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

0 est une racine de multiplicité 2 de χ_A et $\dim(E_0(A)) = 1 < 2$. Ainsi A n'est pas diagonalisable et donc f n'est pas diagonalisable.

2. On détermine $\text{Ker}(f^2)$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

$$\text{Ker}(f^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -4x + 8y - 4z = 0\} = \text{Vect}((1, 0, -1), (1, 1, 1))$$

Et

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f - 2\text{Id}) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -2x + 3y - 3z = 0 \\ -2x + 5y - 5z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \text{Vect}((0, 1, 1)) \end{aligned}$$

On a alors $\dim(\text{Ker}(f^2)) = 2$ et $\dim(\text{Ker}(f - 2\text{Id})) = 1$ et donc $\dim(\text{Ker}(f^2)) + \dim(\text{Ker}(f - 2\text{Id})) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

De plus, si $x \in \text{Ker}(f^2) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id})$ alors $f^2(x) = 0_E$ et $f^2(x) = 4x$ d'où $x = 0_E$.

Il est clair que $0_E \in \text{Ker}(f^2) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. Ainsi $\text{Ker}(f^2) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}) = \{0_E\}$.

On a donc bien $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

3. Il nous faut ici chercher trois vecteurs (u, v, w) tels que $f(u) = 0$, $f(v) = u$ et $f(w) = 2w$.

On peut prendre $w = (0, 1, 1)$, la question précédente nous assure que $f(w) = 2w$.

Puisque $f(u) = 0$, $f(v) = u$ alors $f^2(v) = 0$. On va prendre pour v un élément de $\text{Ker}(f^2)$ qui n'appartient pas à $\text{Ker}(f)$, $v = (1, 0 - 1)$.

On a alors $u = f(v) = (1, 1, 1)$.

La famille (u, v) est une base de $\text{Ker}(f^2)$ et w est une base de $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$, comme ces deux espaces sont supplémentaires la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Notons $\mathcal{B}'$ cette base, on a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$.

Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$. On a

$$f^2(g(x)) = g^4(g(x)) = g^5(x) = g(g^4(x)) = g(f^2(x)) = g(0_E) = 0_E$$

Ainsi $g(x) \in \text{Ker}(f^2)$. On en déduit que $\text{Ker}(f^2)$ est stable par g .

Soit maintenant $x \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$, on a alors

$$f(g(x)) = g^3(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2g(x)$$

Ainsi $g(x) \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$. On en déduit que $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ est stable par g .

5. Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$. Alors, dans la base $\mathcal{B}'$ la matrice de g est

de la forme $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$

On a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(g^2) = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) & 0 \\ c(a+d) & d^2 + bc & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

Or $g^2 = f$, ainsi

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) & 0 \\ c(a+d) & d^2 + bc & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où} \begin{cases} a^2 + bc &= 0 \\ b(a+d) &= 1 \\ c(a+d) &= 0 \\ d^2 + bc &= 0 \\ e^2 &= 2 \end{cases}$$

Puisque $b(a+d) = 1$ on a $a+d \neq 0$ et donc, comme $c(a+d) = 0$, on a $c = 0$. Alors $a^2 = 0$ et $d^2 = 0$, d'où $a = d = 0$ ce qui est absurde car $a+d \neq 0$.

Finalement il n'existe pas d'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$.

Corrigé de l'exercice 23

1. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi(P + \lambda Q)(x) &= \int_x^{x+1} (P + \lambda Q)(t) dt \\ &= \int_x^{x+1} P(t) + \lambda Q(t) dt \\ &= \int_x^{x+1} P(t) dt + \lambda \int_x^{x+1} Q(t) dt \\ &= \phi(P)(x) + \lambda \phi(Q)(x) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout réel x on a bien $\phi(P + \lambda Q) = \phi(P) + \lambda \phi(Q)$. ϕ est donc linéaire.

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\phi(X^k)(x) &= \int_x^{x+1} t^k dt \\ &= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_x^{x+1} \\ &= \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^i - x^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} x^i}{k+1}\end{aligned}$$

Ainsi $\phi(X^k) = \frac{\sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} X^i}{k+1} \in \mathbb{R}_n[X]$

La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ ainsi la famille $(\phi(1), \dots, \phi(X^n))$ engendre $\text{Im}(\phi)$

Puisque tous les éléments $\phi(X^k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$ on en déduit que $\text{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}_n[X]$ et donc que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Dans la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ la matrice de ϕ est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 1 & \frac{\binom{3}{1}}{3} & \frac{\binom{4}{1}}{4} & \dots & \dots & \frac{\binom{n+1}{1}}{n+1} \\ \vdots & 0 & 1 & \frac{\binom{4}{2}}{3} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \frac{\binom{n+1}{n-1}}{n+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Coefficients binomiaux

On rappelle que $\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$ pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, les coefficients diagonaux de notre matrice valent donc tous 1.

4. La matrice de ϕ dans la base canonique est triangulaire supérieure, ses valeurs propres (qui sont également celles de ϕ) sont donc ses coefficients diagonaux.

On a ainsi $\text{Sp}(\phi) = \{1\}$.

Puisque $0 \notin \text{Sp}(\phi)$ on en déduit que ϕ est bijective.

ϕ n'admet qu'une seule valeur propre : 1. Si ϕ était diagonalisable, il existerait alors une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de ϕ .

Dans cette base la matrice de ϕ serait alors diagonale avec uniquement de 1 sur la diagonale : ce serait I_{n+1} . Par conséquent on aurait $\phi = \text{Id}_E$ ce qui n'est pas le cas, car, par exemple $\phi(X) = X + \frac{1}{2} \neq X$.

ϕ n'est donc pas diagonalisable.

On peut également facilement obtenir la dimension de $E_1(\phi)$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(\phi - \text{Id}_E) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \dots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{\binom{3}{1}}{3} & \frac{\binom{4}{1}}{4} & \dots & \dots & \frac{\binom{n+1}{1}}{n+1} \\ \vdots & 0 & 0 & \frac{\binom{4}{2}}{3} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \frac{\binom{n+1}{n-1}}{n+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est échelonnée, son rang est de n . D'après le théorème du rang on a alors $\dim(E_1(\phi)) = n + 1 - \text{Rang}(\phi - \text{Id}_E) = n + 1 - n = 1$.

Comme $\dim(E_1(\phi)) < n + 1$ on peut en déduire que ϕ n'est pas diagonalisable.

On sait que $\phi(1) = 1$, ainsi $\text{Vect}(1) \subset E_1(\phi)$, d'où, par égalité des dimensions $E_1(\phi) = \text{Vect}(1)$.

5. Soit $P \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi(P')(x) = \int_x^{x+1} P'(t) dt = P(x+1) - P(x)$$

Posons Q une primitive de P , on a alors $\phi(P)(x) = Q(x+1) - Q(x)$, d'où

$$\phi(P)'(x) = Q'(x+1) - Q'(x) = P(x+1) - P(x)$$

Ainsi $\phi(P') = \phi(P)'$.

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non-nul tel que $\phi(P) = P$, alors $\phi(P') = \phi(P)' = P'$.

Ainsi $P' \in E_1(\phi)$. Ainsi $\text{Vect}(P, P') \subset E_1(\phi)$

Si $P' \neq 0$ alors la famille (P, P') est libre (car échelonnée en degrés), on a ainsi $\dim(\text{Vect}(P, P')) = 2$, et donc $\dim(E_1(\phi)) \geq 2$ ce qui est absurde car on a constaté à la question précédente que $\dim(E_1(\phi)) = 1$.

Ainsi $P' = 0$ et donc, $P \in \text{Vect}(1)$. On en déduit que $E_1(\phi) \subset \text{Vect}(1)$ et, puisque $\dim(E_1(\phi)) \geq 1$, que $E_1(\phi) = \text{Vect}(1)$.

But ?

Il n'est pas clair quel est le but de cette question puisque que l'on a déjà réussi sans grande difficulté à déterminer les éléments propres de ϕ à la question précédente.